Grenzwerte: $\lim_{P \to 0,0}$ auf x-Achse: $x = x \quad y = 0$
y-Achse: $x = 0 \quad y = y$
Gerade $g: x+$: $x = x \quad y = x+$

Stetigkeitsfunktion: Grenzwert bilden für ges. Pkt Bsp (0/0)
Über Gerade $y = x+$ annähern: $\lim (f(x,y)) = 0$ → stetig
$\neq 0$ → nicht stetig

Partielle Ableitung: f_x f_{xy}
f_{xx} f_{yx} = f_{xy} falls Ableitung stetig
f_y

Vollst. Differential: $dz = D(x,y) = z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ ... Tangentialebene an $P(x_0,y_0)$ und z_0!
$dz_T(x_0,y_0) = A(x-a) + B(y-b) + d$
↳ x_0,y_0 in z $dz_0 = d$

$$dz = \underbrace{z_x(x_0,y_0)\,dx}_{\text{Anstieg x-R}} + \underbrace{z_y(x_0,y_0)\,dy}_{\text{Anstieg y-R}}$$

Aproxim. Fläche 2. Ordnung: Taylorpolynom S. 133

Fehler/Optimierung: $\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{\Delta f} \approx f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x} + f_y(x_0,y_0)\cdot\underbrace{(y-y_0)}_{\Delta y}$

abs: ΔV relativ: $\frac{\Delta V}{V}$ → Gesamte Gl. durch V dividieren

Lagrange: 1. Lagrange-Hilfsfkt: $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 2y - 6)$
↳ z.B. $x^2 + 2y = 6$!
2. Partielle Ableitungen: L_x, L_y, L_λ → x_i, y_i herausfinden + zug. λ!
↳ Potentielle Extrema $P_i(x_0,y_0)$ mit $f(x_0,y_0) = z_0$

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

3. Art des Extrems: nur Lagrangefkt (L_λ): $h(x,y) = x^2 + 2y - 6$
(1) $\nabla(h(x,y)) = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$ (2) Hesse-Matrix L: $\nabla_{xx} L(P) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$
mit

für alle P_i: $\nabla h(P_i) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = h_x u_1 + h_y u_2 \overset{!}{=} 0$ ↳ Bez für u_2: $u_2 = a u_1$
→ z.B. $u_2 = -u_1$
→ neuer Vektor $u = \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}$

P_i in (2) → $\nabla_{xx} L(P_i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

GTR: $[u,-u] \cdot [a,b;c,d] \cdot [u;-u]$
$= (a-b-c+d) \cdot u^2$

Multipl. Skalar: $\vec{u}^T \cdot H \cdot \vec{x} = (u,-u) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} = \underline{\underline{a u^2}}$

→ > 0: Min P_i mit $f(P_i) = \ldots$
< 0: Max P_i mit $f(P_i) = \ldots$

4. Absolutes: Rand! z-B.

www.zeyz.de

Differenzenverfahren: NB: Geg RH: $u(x)$ für $(x,y) \in \Omega = \underbrace{(1,2)}_{x} \times \underbrace{(0,1)}_{y}$

x_{min}, x_{max}

zB: $h = \frac{1}{3} = \Delta x = \Delta y$

u_{xy}

DGL: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Rand: $u_{00} = u(x_0, y_0)$, $u_{01} = u(x_0, y_1)$, $u_{02} =$, $u_{03} =$, u_{30}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{10}, u_{13}, u_{20}, u_{23}

x-innen: u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}

Approx. 1. Abl: $v'(t) \approx \frac{v(t+h) - v(t-h)}{2h} \approx \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$ → gesucht

$$v''(t) \approx \frac{v(t+h) - 2v(t) + v(t-h)}{h^2}$$

Approx in DGL: $u_{xx} \hat{=} v''(x) \hat{=}$ für u_{11}: $\frac{u_{12} - 2u_{11} + u_{01}}{[\text{Schrittweite} = x^2]}$

- Bei gleichen Schrittweiten $|u_{xx} + u_{yy}$: $u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 = u_{xx} + u_{yy}$
- für alle innen u aufstellen → 4 Gl

GTR: LGleichsys [[1,2;3,4],[1;1]] Ordnen nach Gegebenen (Rand!) rechts und Ges. (innen) links
für $x + 2y = 1$, $3x + 4y = -1$ $\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ - GLS aufstellen

u_{11} u_{21} u_{12} u_{22}

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Zlg. rechte Seite

Gauß: S. 152

Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ mit A_1: A_2:

Divergenz: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ → Rand, V = geneh.
$\Phi_1 = \iint_\varphi \iint_r v \cdot n_1 \, dr \, d\varphi$, $n_1 = G_r \cdot G_\varphi$ → Fläche $z_y(u)$
$\Phi_2 = \iint_{Ar} v \cdot n_2 \, dr \, d\varphi$, $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Normalvektor für z.B.

div F aufstellen: $\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$

Transf.: Zylinderk.: $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = z$ | Koord. x TV, y FZ

Stokes:

$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} Q_z - R_y(-1) \\ R_x - P_z(-1) \\ P_y - Q_x(-1) \end{pmatrix}$ | Schaubild zeichnen → R berechnen | $\vec{a} = \partial\varphi \times \partial\eta$ ← Koord. x und η bzw. φ ableiten und Kreuzpr. | Grenzen: $0 \le \varphi \le 2\pi$ || $0 \le \eta \le ?$ → B ∇ R → $\cos\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\pi}{6} = ?$
↳ wo Figur abgeschnitten wird

allg. DGLs:

$u(x)$ bei $x = 0$: $h(x) = h(0) = 0$!
$z_{xy} \to z_x = \ldots + h'(x)$

mit Subst.:

Subst nach x, y umformen:

$z_\xi = z_x \cdot x_\xi + z_y \cdot y_\xi$

$z_{\xi\eta} = z_{x\eta} \cdot x_\xi + z_x \cdot x_{\xi\eta} + z_{y\eta} \cdot y_\xi + z_y \cdot y_{\xi\eta}$

$= (z_{xx} \cdot x_\eta + z_{xy} \cdot y_\eta) \cdot x_\xi + z_x \cdot x_{\xi\eta} + (z_{yx} \cdot x_\eta + z_{yy} \cdot y_\eta) \cdot y_\xi + z_y \cdot y_{\xi\eta}$

mit geg. DGL vergl. → wie groß muß z_ξ sein, damit Stimmt

z_ξ nach ξ integr. $+ f(\eta)$ (Integ. konst. Var.)

Beispiel: Sep: $u(x,t) = A(x) + B(t)$
$2u_{xx} + 8u_{tt} + 4u_t = 4u$, $2 \cdot A_{xx} + 8 \cdot B_{tt} + 4 \cdot B_t = 4 \cdot A \cdot B$
Separiere A und B || Teil A: $-k^2$, Teil B: $-k^2$
Teil A: Char. Polynom: $2\lambda^2 + 2 + 4i\lambda = 0$ || $\lambda_{1/2} = i \pm \sqrt{1}$
$A = C_1 \sin \ldots + C_2 \cdot \ldots$ → mit $B(t=0)$ C_1/C_2 rand.
η: ∈
Teil B: $C_3 \cos \theta = \theta \Rightarrow C_3 = 0$ (C! ϕ ist x_n) → Tein
→ aus Teil B: $C_4 \cos \theta = \theta \Rightarrow C_4 = 0$ (C! ϕ ist x_n) → $k \in$ Tein
→ gelöst und DGL: → $u(t,x) = A \cdot B$; $C_1 \cdot C_3 = D$ → Rest Konstant!
$A \cdot B$ ($u(x,t) = z_{xx} \cdot C_1 \cdot z$) anwende & D!

Quiz Carry: Jeg.

www.zeyz.de